Descompunere in factori primi . Puteri

29.05.2010

Divizibilitate. Numere prime . Numere compuse

Cum stabilim daca un numar natural este prim ?

Pentru a stabili daca un numar natural este prim procedam in felul urmator: impartim numarul, pe rand, la toate numerele prime luate in ordine crescatoare, incepand cu 2. Daca am gasit un numar prim pentru care impartirea s-a efectuat exact, atunci numarul nu este prim. Daca am obtinut un cat mai mic decat impartitorul si impartirea nu s-a efectuat exact la niciunul din numerele prime, atunci numarul nu este prim.

A.Exercitiu : Aratati ca numarul 151 este prim .

Propozitie : Numerele prime mai mari decat 3 sunt de forma 6k-1 sau 6k+1, $k \in N$

Demonstratie : Tinand seama de resturile ce se pot obtine la impartirea cu 6, numerele au una din formele: 6m, 6m+1, 6m+2, 6m+3, 6m+4, 6m+5, $m \in N$
Cum pentru m>0 avem 6m+2=2 (3m+1) , 6m+3=3(2m+1), 6m+4= 2(3m+2), deci numerele 6m, 6m+2, 6m+4 sunt compuse rezulta ca numerele prime au una din formele 6m+1 sau 6m+5=6m +6 -1=6(m+1) -1

B .Exercitii:

1.Sa se afle numerele prime n pentru care n+4 si n+8 sunt numere prime simultan.

Concursul Teodor Topan, simleul silvaniei.24.11.2007

2. Determinati numerele prime a, b, c stiind ca 2a + 3b +4c =32

3. sa se arate ca suma $2001^p + 2001^p + ... + 2001^p$ care are 2000 termeni este divizibila cu $87 \cdot 10^3$, unde $p \in N^*$

Dinu Teodorescu, Targoviste

4. Suma a trei numere naturale distincte nenule este 81. stiind ca unul din numere este egal cu semisuma celorlalte doua si ca fiecare numar este multiplu de 9, aflati cele trei numere.

Botosani, Etapa locala 2000

5. Sa se arate ca $3^{2008} + 5^{2008} + 7^{2008}$ se divide cu 13.
Pentru rezolvarea exercitiului de mai sus sunt necesare se vor folosi propietatiile :

Propietatea 1. Daca a $= Mb + r_1$ si b $= Mb + r_2$ atunci a·b= $Mb + r_1 \cdot r_2$
Propietatea 2. Daca a $= Mb + r$ atunci $a^n = Mb + r^n$
Propietatea 3. Daca $m \in N$, atunci $(m-1)^2 = Mm + 1$

Descompuneri in factori primi

Fie $\mathcal{P}$={ 2, 3, 5, 7, 11,......} multimea numerelor prime . Atunci are loc urmatoarea

Teorema(teorema fundamentala a aritmeticii)
Orice numar natural n se poate scrie in mod unic sub forma
$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ...... \cdot p_k^{\alpha_k}$ *unde* $p_k \in \mathcal{P}$, $p_1 < p_2 < ...... < p_k$ *iar* $a_i > 0$, $i = \overline{1,k}$

Exemplu : 5600= $2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ .Aici $p_1 = 2,\ p_2 = 5,\ p_3 = 7,\ \alpha_1 = 5,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1$.

Numarul divizorilor unui numar natural

Teorema. *Fie $n \in \mathbf{N}$. Daca descompunerea canonica a numarului n este* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ...... \cdot p_k^{\alpha_k}$, *atunci n are* $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ..... \cdot (a_k + 1)$ *divizori.*
Pentru un numar natural n vom nota cu $\tau(n)$ numarul divizorilor sai naturali

Demonstratie : Putem forma lista de divizori astfel :

puteri ale lui $p_1 : 1\ \ p_1^1\ \ p_1^2\ \ p_1^3 .....\ \ p_1^{\alpha_1}$ $(\alpha_1 + 1)$ divizori
puteri ale lui $p_2 : 1\ \ p_1^1\ \ p_1^2\ \ p_1^3 .....\ \ p_1^{\alpha_2}$ $(\alpha_2 + 1)$ divizori
....
puteri ale lui $p_k : 1\ \ p_1^1\ \ p_1^2\ \ p_1^3 .....\ \ p_1^{\alpha_k}$ $(\alpha_k + 1)$ divizori

$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ...... \cdot (\alpha_k + 1)$ daca inmultim pe rand fiecare din puterile lui p_1 cu fiecare din puterile lui p_2 obtinem $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1)$ produse de forma $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2}$. Daca pe fiecare dintre acestea le inmultim pe rand cu fiecare din puterile lui p_3, obtinem $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1)$ produse de forma $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3}$. Procedand la fel cu fiecare factor prim vom obtine toti divizorii lui n de forma $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot .... p_3^{\beta_k}$ .numarul lor va fi $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ...... \cdot (\alpha_k + 1)$

C. Exercitii :

1. Determinati numarul divizorilor numarului 360. Scrieti prin enumerarea elementelor multimea D_{360}
2. Cati divizori, in multimea de numere naturale, are numarul $2^{10}\cdot 5^9 + 2^9\cdot 5^8$?
3. Determinati toate numerele naturale de divizibile cu 10 si care au 4 divizor

(G.M.2-3/ 1993)

4. Fie numarul natural A=2008·n, unde $n \in N$. Sa se gaseasca cel mai mic numar natural impar n, pentru care A are exact 2008 divizori

Concursul Eugen Ionescu, Slatina, 22.03.2008

5.Fie numarul $A=3^x \cdot 5^y \cdot 7^z$,x,y,z $\in N^*$. Determinati numarul A stiind ca 27· A are cu 36 divizori mai multi decat A, iar 49 · A are cu 12 divizori mai multi decat A .

Suma divizorilor naturali ai unui numar natural

Notatie : Pentru un numar natural n vom nota cu $\sigma(n)$ suma divizorilor sai naturali

Teorema : *Pentru* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ...... \cdot p_k^{\alpha_k}$ *avem relatia*

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_1-1} \cdot .... \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

Exercitii:

1. Sa se determine suma divizorilor naturali ai numarului natural 28

Definitie Un numar natural se numeste perfect daca $\sigma(n)=2\cdot n$

Observatie: *Numerele perfecte au fost studiate inca din antichitate cand erau cunoscute numerele perfecte mai mici decat 10 000 si anume 6, 28, 496, 8128*

Cel mai mare divizor comun

Definitie: *Un numar natural d se numeste divizor comun pentru doua numere naturale a si b, daca d/a si d/b.*

Definitie : *Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c) a doua sau mai multor numere naturale, nu toate nule, este cel mai mare numar natural care divide fiecare din numele date.*
Notatie: c.m.m.c (a,b) sau (a, b)

Cel mai mare divizor comun a doua sau mai multor numere naturale se obtine prin inmultirea tuturor factorilor primi comuni (ce apar in descompunerea canonica a numerelor date), luati o singura data, cu exponenetul cel mai mic.

Observtie:
Daca (a, b)= d $\Rightarrow$ d/a si d/b, iar daca a=d·m si b=d·n atunci (m, n)=1

Cel mai mic multiplu comun

Definitie: *Un numar natural m se numeste multiplu comun pentru doua numere naturale a si b daca a/m si b/m*

Definitie : *Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c) a doua sau mai multor numere naturale nenule este cel mai mic numar natural care se divide cu fiecare din numerele date*

Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c) a doua sau mai multor numere naturale se obtine prin inmultirea tuturor factorilor primi comuni si necomuni (ce apar in descompunerea canonica a numerelor date) o singura data , cu exponenntul cel mai mare.

Propozite: *Daca a si b sunt numere naturale, atunci avem : [a,b]·(a, b) =a·b*

D. Exercitii:

1. Fie numerele a=5n+3 si b=8n+5 , n$\in$N. Aratati ca [a,b]= a· b, oricare ar fi n$\in$N
2. Aratati ca daca (2a +5b)⋮13 atunci (3a +b) ⋮13
2. Sa se gaseasca numerele naturale a si b in fiecare din situatiile :
   a) (a,b) = 18 si a+b=180
   b) (a,b) = 8 si a· b = 1344 , unde (a,b) reprezinta c.m.m.d.c al numerelor a si b.
3. Numerele 2 435 , 342 si 4 527 impartite la acelasi numar natural, dau respectiv resturile 35, 42 si 27. Sa se afle numarul la care au fost impartite.