Ultima cifra a unui numar natural
Patrate perfecte si cuburi perfecte
6.11.2010

Ultima cifra a unui numar natural

Daca $n \in \mathbf{N}$, prin u(a) notam ultima cifra a numarului n

Exemplu u(2008)= 8

Observatii :

1. Puterile cu baza 5 au ultima cifra 5. Asadar $u(5^k)=5,\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$
   Daca u(5)=5 , atunci $u(5^k)=5,\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$
2. Puterile cu baza 6 au ultima cifra 6. Asadar $u(6^k)=6,\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$
   Daca u(6)=6 , atunci $u(6^k)=6,\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$
3. Daca u(n)=1 , atunci $u(n^k)=1,\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$

Observatii :

$u(2^{4k})= 6,\ u(2^{4k+1})= 2,\ u(2^{4k+2})= 4,\ u(2^{4k+3})= 8.$
$u(3^{4k})= 1,\ u(3^{4k+1})= 3,\ u(3^{4k+2})= 9,\ u(3^{4k+3})= 7.$
$u(7^{4k})= 1,\ u(7^{4k+1})= 7,\ u(7^{4k+2})= 9,\ u(7^{k+3})= 3.$
$u(8^{4k})= 6,\ u(8^{4k+1})= 8,\ u(8^{4k+2})= 4,\ u(8^{4k+3})= 2.$

Remarca . Daca $n \in \mathbf{N}$ atunci n^4 are ultima cifra 0, 1, 5 sau 6 .

Exercitii :

1. Sa se determine ultima cifra a urmatoarelor numere :
$A= 1+ 3 + 3^2 + 3^3 +.....+3^{50}$ si $B= 4+ 4^2 + 4^3 +.....+4^{201}$

2. Sa se determine ultima cifra a numarului :
$N= 3^{2002} - 2\cdot 3^{2001} - 2\cdot 3^{2000} - ..... - 2\cdot 3^{1002}\cdot$
3. Fie $A =2^{100} + n^3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot ..... \cdot 2004$. care poate fi ultima cifra a numarului A ?

4. Sa se determine ultimele doua cifre ale numarului $N= 7^{32} +7^{30}$

5.Sa se determine ultimele doua cifre ale numarului :
$n=7 + 7^2 + 7^3 +.....+7^{2004}$

6. Aflati ultimele doua cifre ale numarului 2^{2006}

<u>Patrate si cuburi perfecte</u>

Def. Un numar natural n este patrat perfect , daca exista un numar natural m astfel incat $n=m^2$

Observatii:

1. Ultima cifra a unui patrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6, 9.
2. un patrat perfect este de una din formele:
   a) 3k sau 3k+1
   b) 4k sau 4k+1
   c) 5k, 5k+1 sau 5k+4
   d 6k, 6k +1, 6k+3 sau 6k+4
3. Conditiile din observatiile 1-2 sunt necesare dar nu si suficiente, ca un numar natural n sa fie patrat perfect.
4. Daca un numar natural este patrat perfect, atunci toti exponentii factorilor din descompunerea in puteri de factori primi sunt numere pare.

Exemplu : 61 nu este patrat perfect desi ultima sa cifra este 1 (si este de forma 4k+1)

5. Un numar natural **nu este patrat perfect** daca
   a) ultima sa cifra este 2, 3, 7 sau 8;
   b) este cuprins intre patratele a doua numere naturale consecutive;
   c) este de una din formele :
      i) 3k +2 ii)5k +2 sau 5k +3
      ii)4k + 2 sau 4k +3 iv)6k +2 sau 6k + 5
6. Daca in descompunerea in puteri de factori primi a unui numar unul din factori apare cu exponenet impar, atunci numarul nu este patrat perfect.
7. Daca p este numar prim , iar $p \mid k^2$, atunci $p \mid k$.

Def.
Un numar natural n este cub perfect, daca exista un numar natural m astfel incat $n = m^2$.

Exercitii:

1. Aratati ca suma primelor n numere naturale impare:
   $1+ 3+ 5 + ...+ 2n-1$, $n \in \mathbf{N}$ este patrat perfect.

2. 1. Aratati ca suma primelor n numere naturale pare:
   $2+ 4+ 6 + ...+ 2n$, $n \in \mathbf{N}$ nu este patrat perfect.

3. Sa se arate ca $A= x^4 + 2(5y + 1)$ nu este patrat perfect , oricare ar fi numerele naturale x si y.

4. Sa se arate ca numerele de forma $5n + 7$, cu $n \in \mathbf{N}$ nu pot fi patrate perfecte .

5. Aratati ca numarul $A= 23^{2001} + 24^{2001} \cdot 45^{2001} \cdot 9^{2001} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 9$ nu este patrat perfect.

6. Fie $A= 3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Aratati ca a nu este patrat perfect.

7. Determinati cifra nenula a, stiind ca $a^{2n+1} + a^{2n}$ este patrat perfect pentru orice $n \in \mathbf{N}$

8. Scrieti numarul 65^{2005} ca suma de doua patrate perfecte sau ca suma de doua cuburi perfecte .

9. Aratati ca 3^{2006} poate fi scris ca o suma de trei patrate perfecte.

10. Sa se arate ca oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, numarul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 2007$ nu este patrat perfect.

11. Sa se arate ca numarul $2005^n + 2008^n + 2009^n$ nu este patrat perfect $(\forall) n \in N^*$