Descompunere in factori primi. C.m.m.d.c

Prof. Marilena Platon

25.02.2012

<u>Divizibilitatea in multimea numerelor naturale</u>

1. **Criterii de divizibilitate cu 2, 3, 5, 7, 11, 13,19 și 37**

Criteriul de divizibilitate cu 7, 11 sau 13

Numărul natural $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 7, 11 sau 13 dacă si numai daca $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_4 a_3}$ - $\overline{a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 7, 11 respectiv 13

Exemple :

Să se decidă dacă

a) numărul 563618 este divizibil cu 11
b) numărul 26 364 este divizibil cu 13
c) numărul 432 180 este divizibil cu 7

Criteriul de divizibilitate cu 19

Un număr natural se divide cu 19 dacă numărul zecilor numărului adunat cu de două ori numărul reprezentat de cifra unităților este un număr divizibil cu 19

Exemple : Să se decidă dacă numărul 47 063 este sau nu divizibil cu 19

Criteriul de divizibilitate cu 37

Numărul natural $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 37 daca si numai daca $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_4 a_3}$ + $\overline{a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 37

Exemple : Să se decidă dacă numărul 1 236 133 este sau nu divizibil cu 37

2. Descompuneri in factori primi

Fie $\mathcal{P}$ ={ 2, 3, 5, 7, 11,.....} multimea numerelor prime . Atunci are loc urmatoarea

Teorema fundamentala a aritmeticii

Orice numar natural n se poate scrie in mod unic sub forma $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ..... \cdot p_k^{\alpha_k}$ *unde* $p_k \in \mathcal{P}$, $p_1 < p_2 < ..... < p_k$ *iar* $a_i > 0$, $i = \overline{1,k}$

Exemplu : 5600= $2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ .Aici $p_1 = 2,\ p_2 = 5,\ p_3 = 7,\ \alpha_1 = 5,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1$.

3. Numărul divizorilor unui numar natural

Teorema. *Fie* $n \in \mathbf{N}$. *Dacă descompunerea canonică a numărului n este* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ..... \cdot p_k^{\alpha_k}$ *, atunci n are* $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ..... \cdot (a_k + 1)$ *divizori.*

<u>Observatie:</u>

Pentru un număr natural n vom nota cu $\tau(n)$ *numarul divizorilor săi naturali*

Exercitii :

1. Determinati numarul divizorilor numarului 3570.

2. Cati divizori, in multimea de numere naturale, are numarul $2^{10} \cdot 5^9 + 2^9 \cdot 5^8$?

3.Determinati toate numerele naturale de divizibile cu 10 si care au 4 divizori.

4. Determinati toate numerele naturale de forma $2^m \bullet 3^n$ care au exact 8 divizori exista (n si m sunt numere naturale)

Suma divizorilor naturali ai unui numar natural

Notatie : Pentru un numar natural n vom nota cu $\sigma(n)$ suma divizorilor sai naturali

Teorema : *Pentru* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ..... \cdot p_k^{\alpha_k}$ *avem relatia*

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_1-1}\cdot.....\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

Exercitii:

1. Sa se determine suma divizorilor naturali ai numarului natural 28

Definitie Un numar natural se numeste perfect daca $\sigma(n)$=2· n

Observatie: *Numerele perfecte au fost studiate inca din antichitate cand erau cunoscute numerele perfecte mai mici decat 10 000 si anume 6, 28, 496, 8128*

Cel mai mare divizor comun

***Definitie**: Un numar natural d se numeste divizor comun pentru doua numere naturale a si b, daca d/a si d/b.*

***Definitie :** Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c) a doua sau mai multor numere naturale, nu toate nule, este cel mai mare numar natural care divide fiecare din numele date.*

Notatie: c.m.m.c (a,b) sau (a, b)

Cel mai mare divizor comun a doua sau mai multor numere naturale se obtine prin inmultirea tuturor factorilor primi comuni (ce apar in descompunerea canonica a numerelor date), luati o singura data, cu exponenetul cel mai mic.

Observtie:

Daca (a, b)= d $\Rightarrow$ d/a si d/b, iar daca a=d·m si b=d·n atunci (m, n)=1

Exercitii:

1. Să se gasească numerele naturale a și b în fiecare din situațiile :
   a) (a,b) = 18 si a+b=180
   b) (a,b) = 8 si a · b = 1344 , unde (a,b) reprezintă c.m.m.d.c al numerelor a si b.

2. Numerele 2 435 , 342 si 4 527 împărțite la același număr natural, dau respectiv resturile 35, 42 si 27. Să se afle numărul la care au fost împarțite.

3. Să se determine numerele naturale a și b știind că 3a + 5b = 180 și (a, b) =10

Tema de casa

1. Fie numarul $A=3^x \cdot 5^y \cdot 7^z$,x,y,z $\in$ N^* . Determinati numarul A stiind ca 27· A are cu 36 divizori mai multi decat A, iar 49 · A are cu 12 divizori mai multi decat A .

(G.M.2-3/ 1993)

2. Fie numarul natural A=2008·n, unde n$\in$N. Sa se gaseasca cel mai mic numar natural impar n, pentru care A are exact 2008 divizori.

Concursul Eugen Ionescu, Slatina, 22.03.2008

3. Determinați numerele naturale a și b astfel încât $a^2 + b^2 = 832$ si (a, b) =18

4. Să se găsească cel mai mic număr natural cu 16 divizori naturali, care are în descompunerea sa doar factorii 2, 3 și 83.